Adrian Zanoschi — Gheorghe Iurea
Gabriel Popa — Petru Răducanu
Ioan Șerdean

# Bacalaureat 2017
# Matematică
# *M_mate-info*

**Teme recapitulative**
**60 de teste, după modelul M.E.N.C.S.**
**Breviar teoretic**

PARALELA 45
EDITURA

# Cuprins

**Clasa a XII-a**

# Teme recapitulative

# Clasa a IX-a

## 1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

**1.** Calculați:

a) $2 \cdot (-3) - (-4) : 2 + (-25) : (-5)$; b) $2^{20} : 2^{18} - 3^{20} : 3^{19} + 5^0$;

c) $30 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0{,}3 + \frac{1}{15}\right)$; d) $8 \cdot [0{,}(3) + 0{,}1(6)]$.

**2.** Fie $0{,}a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Calculați: $a_{2018} + a_{2019} + a_{2020}$.

**3.** Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați mulțimea: $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

**4.** Ordonați crescător numerele $a = 2{,}5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2{,}(51)$, $d = 2{,}51$.

**5.** Calculați:

a) $\sqrt{45} + \sqrt{80} - \sqrt{125}$; b) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$;

c) $\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$; d) $\frac{3}{\sqrt{7} + 2} + \frac{2}{\sqrt{7} + 3}$.

**6.** Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

**7.** Arătați că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}}$ este natural.

**8.** Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor $a$ și $b$.

**9.** Determinați numerele raționale $a$ și $b$, știind că $\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

**10.** Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

**11.** Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

**12.** Aflați câte numere iraționale conține mulțimea $\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{199}, \sqrt{200}\right\}$.

**13.** Determinați partea întreagă și partea fracționară pentru fiecare dintre următoarele numere: $a = 2{,}7$, $b = -0{,}6$, $c = 13$, $d = -\sqrt{3}$.

**14.** Calculați:

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$; b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;

c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2} + \sqrt{3}\right]$; d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2} + \sqrt{3}\right\}$.

**15.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $[x] + [x + 1] + [x + 2] = 24$; b) $[x + 1] = 2x - 1$;

c) $\{2x\} = 0$; d) $\{x\} = \frac{1}{3}$.

**16.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $|x - 2| = 5$; b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12$;

c) $|1 - 2x| = |x + 4|$; d) $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$.

**17.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

a) $|1 - 2x| \leq 3$; b) $|x + 3| \geq 4$.

**18.** Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 1| \leq 100\}$.

**19.** Arătați că valoarea expresiei $E(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ nu depinde de numărul real $x$.

**20.** Demonstrați că $|2x - 3| + 2|x - 1| \geq 1$, pentru orice număr real $x$.

**21.** Demonstrați că $x^2 + 3x + 3 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**22.** Demonstrați că, dacă $x, y \in [2, \infty)$, atunci $xy - 2x - 2y + 6 \in [2, \infty)$.

**23.** Demonstrați că, dacă $x, y \in (-1, 1)$, atunci $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$.

**24.** Fie $E(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $E(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$;

b) $E(x) > \frac{3}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

**25.** Demonstrați că:

a) $x+\frac{1}{x}\geq 2$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$;

b) $x+\frac{1}{x}\leq -2$, oricare ar fi $x\in(-\infty,0)$;

c) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

**26.** Demonstrați, prin inducție, că următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

b) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

c) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$;

d) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

**27.** Demonstrați, prin inducție, că următoarele inegalități sunt adevărate pentru orice număr natural $n$ care îndeplinește condiția indicată:

a) $2^n>2n+1$, $n\geq 3$;

b) $n!>2^n$, $n\geq 4$;

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n\geq 1$;

d) $\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, $n\geq 2$.

**28.** Demonstrați că numărul $13^n+7^n-2$ se divide cu 6, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

**29.** Demonstrați că $7\cdot 25^n+2\cdot 6^{n+1}$ se divide cu 19, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

**30.** Aflați câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

**31.** Aflați câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 0.

**32.** Determinați câte numere naturale de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3.

**33.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

**34.** Aflați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

**35.** Determinați câte numere de patru cifre distincte au produsul cifrelor egal cu un număr impar.

**36.** Stabiliți în câte moduri se poate îmbrăca Dan pentru un meci de tenis, știind că el are 5 tricouri, 4 perechi de pantaloni scurți și 3 perechi de pantofi de sport.

**37.** Numărul de înmatriculare al unui automobil dintr-un județ este format din două cifre (nu este permisă combinația 00) și din trei litere ale alfabetului latin (26 de litere). Aflați numărul maxim de mașini care pot fi înmatriculate într-un județ.

**38.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aflați câte perechi $(a, b) \in A \times A$ au proprietatea că produsul $a \cdot b$ este impar.

**39.** Determinați câte numere naturale, mai mici decât 101, sunt divizibile cu 3 sau cu 5.

**40.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 199, 200\}$.

a) Aflați câte dintre elementele mulțimii $A$ se divid cu 6 și cu 8.
b) Aflați câte dintre elementele mulțimii $A$ se divid cu 6, dar nu se divid cu 8.
c) Determinați câte dintre elementele mulțimii $A$ se divid cu 6 sau cu 8.

## 1.2. Șiruri. Progresii

**1.** Completați cu câte trei termeni următoarele șiruri, apoi scrieți termenul general al fiecăruia:

a) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$; b) $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$;
c) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$; d) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ .

**2.** Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

a) Există vreun termen al șirului egal cu $\dfrac{2}{3}$?
b) Câți termeni ai șirului sunt mai mici decât 0,7?
c) Câți termeni ai șirului sunt în intervalul $(0{,}99; 1)$?

**3.** Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq \mathbb{N}}$, de termen general $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$, este crescător.

*(Variante Bac, 2009)*

**4.** Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq \mathbb{N}^*}$, de termen general $a_n = n^2 - n$, este strict monoton.

*(Variante Bac, 2009)*

**5.** Fie $E(x) = x^2 - 4x + 3$, unde $x \in \mathbb{R}$. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, definim șirul $(a_n)_{n \geq 4}$ prin:

$$a_n = \frac{1}{E(4)} + \frac{1}{E(5)} + \ldots + \frac{1}{E(n)}$$

a) Demonstrați că șirul este strict crescător.
b) Demonstrați că șirul este mărginit.
c) Arătați că $a_n = \dfrac{(n-3)(3n-4)}{4(n-1)(n-2)}$, pentru orice $n \geq 4$. *(Simulare Bac, 2000)*